

# Synthèse modale : une méthode de sous-structuration dynamique pour la modélisation des systèmes thermiques linéaires

B. FLAMENT†, F. BOURQUIN‡ et A. NEVEU†

† Groupe Informatique et Systèmes Energétiques, Ecole des Mines de Paris, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, GISE-ENPC La Courtine, 93167 Noisy Le Grand Cedex, France

‡ Laboratoire Mixte LCPC/CNRS, Laboratoire des Matériaux et Structures de Génie Civil, Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, 58 bd Lefebvre, 75015 Paris, France

(Reçu le 8 avril 1992)

**Résumé**—Nous présentons une nouvelle méthode modale permettant d'étendre le champ d'application de ce type de technique aux systèmes complexes. L'idée de base repose sur le fait que les systèmes complexes sont constitués d'une multitude de composants simples couplés. Aussi, nous proposons de construire un modèle modal réduit par sous-structuration. Deux méthodes modulaires sont mises en oeuvre. Tout d'abord nous détaillons une méthode de sous-structuration dynamique ou de synthèse modale de type Galerkin moindres carrés dont le but est de calculer les éléments propres de l'opérateur de la chaleur défini dans le système global. Elle permet non seulement d'avoir une bonne approximation des fonctions propres globales en tout point mais aussi de contrôler la continuité du flux sur la frontière de raccordement. Ensuite nous présentons une méthode de sous-structuration statique pour le calcul des champs glissants relatifs au système global. Enfin, nous précisons l'écriture du modèle d'évolution modal du système global. Une application concrète montre la pertinence des techniques proposées. Les méthodes décrites dans cet article supposent un contact thermique parfait entre les composants et une certaine forme de symétrie dans le découpage du système complexe. Ces limitations seront levées prochainement.

## 1. MOTIVATION

LA COMPLEXITÉ des systèmes thermiques, liée notamment à leur géométrie (ensemble de pièces mécaniques), ou à leur étendue spatiale (enveloppe de bâtiment) nécessite pour leur simulation ou leur analyse des approximations. On procède généralement à une discrétisation spatiale qui engendre un nombre de noeuds important.

Pour connaître le comportement thermique dans l'espace et dans le temps de tels systèmes, des méthodes d'approximation par éléments finis ou des schémas aux différences finies sont utilisés [1, 2]. Ces méthodes autorisent la prise en compte des non-linéarités ainsi que des phénomènes transitoires fortement variables. Par contre, elles présentent l'inconvénient de nécessiter des temps de calcul importants. Le nombre élevé de coefficients intervenant dans les calculs rend difficile l'analyse thermique du système.

Aussi, vu la demande croissante des 'utilisateurs de modèles' pour alléger les temps de simulation et pour faciliter l'analyse du comportement, des méthodes permettant de réduire la taille des modèles s'avèrent nécessaire.

Une première idée consiste à simplifier judicieusement le maillage du système (réduire le nombre de noeuds); mais ce type de méthode ne permet pas de contrôler la précision du modèle obtenu. Elle est de plus limitée dès que la géométrie est 'tortueuse'.

Une autre approche dite *méthode des éléments de frontière* ne nécessite qu'un maillage du contour du domaine; elle est fondée sur une formulation de type intégrale de contour utilisant pour fonctions de pondération des fonctions de Green dépendant de l'espace et du temps. Cette méthode permet entre autres de diminuer d'une unité la dimension du problème (3D en 2D, 2D en 1D) [3]. Elle peut traiter des problèmes de géométrie complexe, mais ne met pas en évidence les paramètres intrinsèques du système de façon à en faire une analyse *a priori*.

Une autre démarche consiste à obtenir une représentation du système dans un espace  $E$  différent de l'espace d'origine. Dans  $E$  les paramètres caractéristiques du système sont intrinsèques (indépendance *vis-à-vis* des sollicitations), ce qui permet d'en faire une analyse *a priori*.

Cette approche correspond aux méthodes de Rayleigh-Ritz. Parmi ces méthodes, une technique d'*analyse modale* appliquée aux systèmes thermiques a été développée à l'Ecole des Mines de Paris [4, 5]. Dans ce cas, les paramètres caractéristiques du système sont les éléments propres de l'opérateur spatial de la chaleur ( $\mathcal{L}$ ), qui détermine le comportement dynamique du système [6].

Chaque valeur propre de l'opérateur  $\mathcal{L}$ , assimilable à une constante de temps, est associée à une fonction propre assimilable à un thermogramme élémentaire. Ces fonctions propres forment une base orthogonale

## NOMENCLATURE

|                |                                                                                                                               |                  |                                                                                                                                                        |
|----------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>B</b>       | matrice de commande modale                                                                                                    | $U$              | sollicitation                                                                                                                                          |
| $\mathcal{B}$  | opérateur de conditions aux limites                                                                                           | $u$              | fonctions définies sur $H^1(\Omega)$                                                                                                                   |
| $C$            | capacité calorifique volumique                                                                                                | $V_\Gamma$       | espace des fonctions définies comme la trace sur $\Gamma$ des fonctions de $W$                                                                         |
| $F_\Gamma$     | matrice diagonale des valeurs propres de couplage                                                                             | $V'_\Gamma$      | dual de $V_\Gamma$                                                                                                                                     |
| $\mathcal{F}$  | matrice diagonale des valeurs propres globales                                                                                | $\mathcal{V}$    | fonction propre globale de $\mathcal{L}$                                                                                                               |
| $h$            | coefficient d'échange                                                                                                         | $V$              | fonction propre locale de $\mathcal{L}$ , dite de transfert                                                                                            |
| $H^1(\Omega)$  | espace de Sobolev des fonctions définies sur $\Omega$ de carré sommable et dont les dérivées sont également de carré sommable | $W$              | espace des fonctions définies sur $H^1(\Omega)$ , vérifiant des conditions aux limites homogènes de première espèce, s'il y en a, sur $\partial\Omega$ |
| $K$            | conductivité thermique                                                                                                        | $\mathcal{X}$    | coefficient de décomposition du champ dynamique sur la base propre globale                                                                             |
| $K_\Gamma$     | matrice de conductivité                                                                                                       | $\mathcal{X}$    | vecteur des états d'excitation des modes globaux                                                                                                       |
| $L^2(\Omega)$  | espace des fonctions de carré sommable définies sur $\Omega$                                                                  | $z$              | valeur propre globale de $\mathcal{L}$ .                                                                                                               |
| $\mathcal{L}$  | opérateur de la chaleur limité au terme conductif: $K\Delta(\cdot)$                                                           |                  |                                                                                                                                                        |
| <b>M</b>       | matrice de capacité                                                                                                           |                  |                                                                                                                                                        |
| $N_k$          | dimension de la base des modes locaux de transfert                                                                            | Symbols grecs    |                                                                                                                                                        |
| $N_\Gamma$     | dimension de la base des modes locaux de couplage                                                                             | $\alpha$         | coefficient de décomposition d'une fonction propre globale sur les bases locales des fonctions propres de couplage                                     |
| $\mathbf{n}_k$ | normale extérieure à $\Gamma$ , pour le composant $k$                                                                         | $\Delta$         | opérateur de Laplace                                                                                                                                   |
| $p$            | coefficient de décomposition d'une fonction propre globale sur les bases locales des fonctions propres de transfert           | $\Gamma$         | frontière de raccordement                                                                                                                              |
| <b>p</b>       | vecteur des coefficients de décomposition d'une fonction propre globale sur les bases locales de transfert et de couplage     | $\gamma$         | vecteur des coefficients de décomposition d'un champ glissant global, sur la base des modes de couplage locaux                                         |
| $\mathcal{P}$  | matrice des vecteurs propres globaux (fonctions propres globales)                                                             | $\lambda_\Gamma$ | valeur propre locale de $\mathcal{T}$                                                                                                                  |
| $S$            | fonction propre locale de $\mathcal{T}$ , dite de couplage                                                                    | $\lambda$        | valeur propre locale de $\mathcal{L}$                                                                                                                  |
| $\tilde{S}$    | relèvement harmonique de $S$ sur $\Omega$                                                                                     | $\phi, \psi$     | fonctions test                                                                                                                                         |
| $S_p$          | matrice des champs statiques globaux                                                                                          | $\Omega$         | domaine de $\mathbb{R}^n$                                                                                                                              |
| $\mathcal{T}$  | opérateur de raccordement                                                                                                     | $\partial\Omega$ | frontière extérieure du domaine $\Omega$ .                                                                                                             |
| $T$            | champ de température solution du problème d'évolution global                                                                  |                  |                                                                                                                                                        |
| $T^d$          | partie dynamique de la solution du problème d'évolution global                                                                | Indices          |                                                                                                                                                        |
| $T^g$          | régime glissant de la solution du problème d'évolution global                                                                 | $i$              | indice des éléments propres globaux                                                                                                                    |
| $t^g$          | régime glissant de la solution du problème d'évolution local                                                                  | $j$              | indice de sollicitation                                                                                                                                |
|                |                                                                                                                               | $k$              | indice de composant                                                                                                                                    |
|                |                                                                                                                               | $l$              | indice des éléments propres locaux de transfert                                                                                                        |
|                |                                                                                                                               | $N$              | dimension de l'espace engendré par les fonctions globales                                                                                              |
|                |                                                                                                                               | $q$              | indice des éléments propres locaux de couplage.                                                                                                        |

de l'espace  $E$  appelée base propre. La clé de la méthode modale est d'exprimer le champ des températures comme une combinaison des fonctions propres. Les coefficients de cette décomposition, appelés 'états d'excitation des modes' vérifient alors une équation différentielle très simple. La pratique est légèrement plus compliquée. En effet, la solution du problème

thermique d'évolution est la somme d'une réponse dynamique et d'un régime pseudo-statique. C'est la séparation glissant/dynamique d'usage courant en thermique. On montre que c'est le régime dynamique qui se décompose sur la base des fonctions propres. La projection du champ sur une base de fonctions transforme le problème continu *vis-à-vis* de la variable

d'espace en un problème discret. Les inconnues sont les états d'excitation, en nombre fini, les fonctions propres continues étant supposées connues.†

L'intérêt d'une telle méthode apparaît lorsque l'on constate qu'un nombre très réduit d'éléments propres suffit à reconstituer la solution avec une bonne précision. Le problème consiste alors à sélectionner les modes dominants. Diverses méthodes de réduction peuvent être employées, telles que des méthodes simples de troncature [9], des méthodes de mesure de dominance [10], des méthodes d'agrégation [11] ou encore des méthodes d'identification [12].

Les avantages évoqués ci-dessus ont été largement exploités ces dernières années, que ce soit pour la simulation des évolutions temporelles [13, 14], l'analyse de l'inertie thermique [15, 16], ou l'identification de processus énergétiques [17, 18].‡

Mais ces avantages ont un coût numérique que l'on ne peut absolument pas éviter : le passage de la base d'origine à la base propre.

Ce changement de base se traduit en pratique par la diagonalisation de la matrice du problème aux valeurs propres. Aussi dans le cas de systèmes complexes, le traitement des matrices de grande taille par des méthodes numériques spécifiques [19, 20] affecte la précision numérique de la méthode et se révèle pénalisant en temps calcul, ce qui est regrettable puisque seul un petit nombre d'éléments propres suffit à construire un modèle réduit de bonne précision.

Pour pallier à cet inconvénient, sachant qu'un système thermique complexe est en général constitué d'une multitude de composants simples couplés, le calcul d'un modèle réduit d'un système complexe peut être envisagé par une méthode de sous-structuration.

Pour cela, nous proposons une démarche qui est classique en mécanique des structures [21] :

- Après avoir isolé chaque composant de la structure globale, on effectue une analyse modale de chacun d'entre eux.§ Cette première étape vise d'une part à construire pour chaque composant une base propre réduite (*base propre locale*), et d'autre part à calculer les champs statiques locaux relatifs aux sollicitations appliquées au niveau de chaque composant.

- Les modèles locaux réduits sont ensuite raccordés en respectant les couplages physiques des composants correspondants. Par exemple deux composants peuvent être liés par un contact thermique parfait.

† La méthode modale consistant à obtenir les résultats par la superposition de solutions élémentaires, ne peut en conséquence s'appliquer qu'à des équations linéaires. Néanmoins des travaux récents ont introduit la notion de modes non-linéaires [7, 8].

‡ L'analyse modale a des applications dans de nombreux domaines tels que la mécanique des structures, l'électromagnétisme . . . .

§ Dans certains cas les modèles de sous-systèmes inaccessibles au calcul car trop complexes peuvent être obtenus par voie expérimentale (identification), ce qui est un avantage des méthodes de synthèse modale.

- On obtient alors un modèle sous forme modale du système global, qui peut à son tour être réduit. Il peut même être raccordé à un autre modèle. On utilise dans ce cas l'aspect récursif de la méthode.

La solution globale d'un problème thermique s'exprimant comme la somme d'une partie dynamique et d'une partie statique, la démarche décrite ci-dessus devra permettre d'obtenir ces deux régimes.

Si l'approche par sous-structuration proposée ici convient à la fois à la détermination de la solution dynamique et de la solution pseudo-statique, les méthodes de calcul retenues diffèrent quelque peu. Ainsi, dans le paragraphe 2 on présente une méthode de synthèse modale modulaire permettant le calcul des éléments propres du système global. Cette méthode est actuellement limitée à l'étude de systèmes présentant une certaine forme de symétrie par rapport à la frontière de raccordement de ses composants. Le paragraphe 3 est consacré à la méthode de sous-structuration retenue pour le calcul de la partie pseudo-statique du modèle de comportement du système global. Dans le paragraphe 4 on précise l'écriture du modèle d'évolution. Enfin dans le paragraphe 5 un exemple d'application illustre la pertinence des méthodes proposées.

## 2. DESCRIPTION DE LA METHODE DE SYNTHESE MODALE

L'idée de la synthèse modale consiste à fractionner la recherche des éléments propres de l'opérateur de la chaleur par sous-domaines. Les fonctions propres d'un système constitué de plusieurs composants sont alors elles-mêmes décomposées sur les bases propres de ses composants.

Considérons un domaine  $\Omega$  quelconque qu'on décompose en deux sous-domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  séparés par une frontière  $\Gamma$  (Fig. 1). On suppose un contact thermique parfait entre les deux sous-domaines. On note  $\mathcal{L}$  l'opérateur de la chaleur défini sur  $\Omega$ .

L'objectif de toute méthode de synthèse modale est de calculer les éléments propres de  $\mathcal{L}$  (valeurs propres  $z_i$ , fonctions propres  $\mathcal{V}_i$ ), appelés dans la suite éléments propres globaux, à partir notamment des éléments propres du même opérateur mais définis sur chaque sous-domaine  $\Omega_k$  (valeurs propres locales  $\lambda_{k,i}$ , fonctions propres locales  $\mathcal{V}_{k,i}$ ), sachant :

- d'une part, que les fonctions propres globales

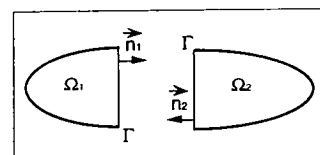


FIG. 1. Domaine  $\Omega$  séparé en deux sous-domaines.

vérifient un problème aux valeurs propres défini en tout point de  $\Omega$ :

$$\forall M \in \Omega \quad \mathcal{L}(\mathcal{V}_i(M)) = z_i C \mathcal{V}_i(M), \quad (1)$$

avec:  $\mathcal{L}$  = opérateur de transfert de la chaleur limité au terme conductif soit:  $\mathcal{L}(\cdot) = K\Delta(\cdot)$  où  $K$  désigne la conductivité dans  $\Omega$ ;  $C$  = capacité calorifique volumique.

• d'autre part, qu'elles doivent respecter des conditions aux limites imposées sur la frontière extérieure  $\partial\Omega$ , de la forme:

$$\forall M \in \partial\Omega \quad \mathcal{B}(\mathcal{V}_i(M)) = 0, \quad (2)$$

avec:  $\mathcal{B}$  = opérateur de condition limite sur la frontière extérieure, autoadjoint et défini par:  $\mathcal{B}(\cdot) = -K\nabla(\cdot) \cdot \mathbf{n} + h(\cdot)$ . En faisant tendre le coefficient  $h$  vers 0 ou l'infini, on retrouve les conditions de flux imposé ou de température imposée.

• enfin qu'elles doivent respecter les conditions physiques d'un contact thermique que nous supposons parfait entre les deux sous-domaines, c'est-à-dire la continuité en température et en flux sur la frontière de raccordement soit:

$$\forall M \in \Gamma \quad \mathcal{V}_{1i}(M) = \mathcal{V}_{2i}(M), \quad (3)$$

$$\forall M \in \Gamma \quad -K_1 \nabla(\mathcal{V}_{1i}(M)) \cdot \mathbf{n}_1 - K_2 \nabla(\mathcal{V}_{2i}(M)) \cdot \mathbf{n}_2 = 0. \quad (4)$$

Si on recherche les fonctions propres globales comme une combinaison linéaire des fonctions propres locales, les conditions (3) et/ou (4) peuvent être respectées. Par contre la trace sur  $\Gamma$  des fonctions globales obtenues ne sera pas correcte. En effet les fonctions locales vérifient des conditions aux limites homogènes: si la condition aux limites sur  $\Gamma$  est de type Dirichlet, les fonctions propres locales sont toutes nulles sur la frontière de raccordement, pour une condition de type Neuman ce sont les dérivées normales des fonctions locales qui s'annulent sur  $\Gamma$ ... Aussi les fonctions propres locales ne suffisent pas à elles seules pour reconstituer avec une bonne approximation les fonctions globales. On introduit donc d'autres fonctions appelées fonctions de couplage. Elles sont déterminées de façon à former une base de l'espace des fonctions définies et sommables sur la frontière  $\Gamma$ .

Dans le cas des systèmes multidimensionnels qui nous intéressent exclusivement ici, les relations (3) et (4) sont des relations continues de l'espace, vérifiées en tout point de  $\Gamma$ . Une transformation intégrale de ces conditions de raccordement est donc à envisager.†

Ainsi, le respect rigoureux des conditions de rac-

cordement au sens classique est certainement illusoire. En toute généralité, il faut alors s'attendre à ce que la méthode de synthèse modale ne puisse pas générer des fonctions propres globales continues sur  $\Gamma$ . La méthode à développer est alors dite 'non-conforme'. La maîtrise de ce type de méthode est délicate.

Or la continuité des fonctions globales peut être rigoureusement respectée si les deux conditions suivantes sont vérifiées:

• Si on retient des conditions aux limites sur  $\Gamma$  de type Dirichlet. Dans ce cas, le respect de la continuité des fonctions globales ne peut être assuré que par les fonctions de couplage puisque les fonctions propres locales s'annulent sur  $\Gamma$ .

• Si les fonctions de couplage sont telles que leur trace sur  $\Gamma$  soit identique quel que soit le sous-domaine considéré. Cette condition est notamment vérifiée si la décomposition du système global est symétrique par rapport à la frontière de raccordement. Cette condition présuppose que les fonctions de couplage sont définies localement, indépendamment du système global.

Dans la suite, nous respecterons les limitations décrites ci-dessus afin de montrer la faisabilité d'une technique de synthèse modale applicable aux systèmes thermiques multidimensionnels. Ces restrictions seront levées prochainement, ce travail étant actuellement en développement.

Ainsi, après avoir déterminé les bases locales, les méthodes de synthèse modale reviennent à calculer une approximation des coefficients de décomposition des fonctions globales sur ces bases. Pour cela des méthodes de type Galerkin sont en général utilisées. Elle ne permettent pas de respecter la condition (4) *a priori*. La méthode présentée ici permet d'imposer néanmoins cette condition de façon approximative et implicite. Avant de la détailler nous allons définir les bases locales.

## 2.1. Modes propres de transfert et de couplage

2.1.1. *Bases locales de transfert.* Pour déterminer les éléments propres locaux de l'opérateur  $\mathcal{L}$  défini sur chaque sous-domaine, il faut appliquer sur la frontière de raccordement des sous-domaines une condition aux limites dont la nature peut être *a priori* choisie arbitrairement. Néanmoins, la mise en oeuvre d'une méthode conforme suggère de retenir une condition aux limites de type Dirichlet. On résout donc un problème classique de valeurs propres de l'opérateur de Laplace [22]. Les bases propres locales que nous appelons désormais *bases propres locales de transfert* peuvent alors être constituées en ne conservant que les modes dominants tels que le comportement dynamique du sous-domaine considéré soit respecté (notamment au niveau de sa frontière de raccordement).

Leur calcul se fait à partir du problème aux valeurs propres local que l'on peut définir comme suit:  $\forall k = 1, 2$ :

† Dans le cas de systèmes 'pseudo-1D' (c'est-à-dire tels que les couplages entre composants peuvent être considérés monodimensionnels), les conditions de raccordement sont des relations scalaires. La frontière de raccordement est représentée par un point. Dans ce cas la méthode de synthèse modale mise en oeuvre respecte rigoureusement les conditions physiques de raccordement [23-25].

$$\forall M \in \Omega_k \quad \mathcal{L}_k(V_{kl}(M)) = \lambda_{kl} C_k V_{kl}(M), \quad (5)$$

$$\forall M \in (\partial\Omega_k - \Gamma) \quad \mathcal{B}_k(V_{kl}(M)) = 0, \quad (6)$$

$$\forall M \in \Gamma \quad V_{kl}(M) = 0. \quad (7)$$

Pour  $k = 1$  ou  $2$ , les fonctions propres locales de transfert forment une base orthogonale de l'espace  $\mathcal{W}_k$ . Elles sont de plus prolongées par zéro dans  $\Omega_{3-k}$ .

2.1.2. *Bases locales de couplage.* Nous souhaitons déterminer des fonctions de couplage telles que :

- la base qu'elles engendrent présente des dominances ;
- leur définition soit locale, indépendante de la structure globale.

Aussi, nous définissons les fonctions de couplage comme les fonctions propres d'un opérateur 'local' de raccordement  $\mathcal{F}_k$  tel que, pour chaque sous-domaine  $k$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_k : V_\Gamma &\rightarrow V_\Gamma \\ u &\rightarrow \mathcal{F}_k(u) = -K_k \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial \mathbf{n}_k} \Big|_\Gamma, \end{aligned} \quad (8)$$

où  $\tilde{u}_k$  représente le prolongement harmonique (ou relèvement harmonique) de  $u$  sur le sous-domaine  $\Omega_k$ . Ce relèvement harmonique vérifie les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \forall M \in \Omega_k \quad \mathcal{L}_k(\tilde{u}_k) &= 0, \\ \forall M \in (\partial\Omega_k - \Gamma) \quad \mathcal{B}_k(\tilde{u}_k) &= 0, \\ \forall M \in \Gamma \quad \tilde{u}_k &= u. \end{aligned} \quad (9)$$

Les fonctions propres ( $S_{kq}$ ) de cet opérateur sont définies sur la frontière de raccordement. Ces fonctions forment une base orthogonale de l'espace des fonctions définies et sommables sur  $\Gamma$ . Par définition elles sont solutions du problème aux valeurs propres suivant :

$$\mathcal{F}_k(S_{kq}) = \lambda_{kq}^k S_{kq}. \quad (10)$$

On construit alors les *modes de couplage locaux* notés  $\tilde{S}_{kq}$ , par relèvement harmonique sur  $\Omega_k$  des fonctions propres  $S_{kq}$  (cf. relations (9)).

Notons que  $\mathcal{F}_k$  est un peu pour la frontière de raccordement ce que  $\mathcal{L}$  est pour le domaine interne sachant que les fonctions propres de  $\mathcal{F}_k$  vérifient des conditions homogènes en tout point interne du domaine (fonctions harmoniques), alors que les fonctions propres de  $\mathcal{L}$  vérifient des conditions aux limites homogènes sur  $\Gamma$ .

Comme la base des modes de transfert, la base des modes de couplage peut être réduite. En pratique, on constate que peu de modes sont à prendre en compte pour obtenir une bonne précision.

Ainsi définis, les modes de couplage locaux, de la même façon que les modes de transfert, sont déterminés pour chaque composant sans aucune référence à la structure globale. C'est une des originalités de la méthode qui lui donne son caractère modulaire.

Le choix que nous avons fait ici n'est pas le seul possible. D'autres types de fonctions de couplage peuvent être considérés. On peut retenir comme fonctions de couplage des distributions ponctuelles sur les points du maillage de la frontière de raccordement [21]. Ces fonctions dépendent alors de la discrétisation de  $\Gamma$  (ce qui peut être pénalisant pour des maillages fins) ; de plus elles forment une base qui ne présente pas de dominance évidente.

On peut aussi prendre pour fonctions de couplage les fonctions propres d'un opérateur de Poincaré Steklov [26, 27]. Cet opérateur n'est pas défini localement pour chaque sous-domaine, ses fonctions propres sont relevées harmoniquement sur  $\Omega$ . Cependant, bien que ces fonctions soient indépendantes de la discrétisation, elles ne peuvent être déterminées indépendamment de la structure globale.

Aussi, après s'être fixé le nombre de modes locaux de transfert ( $N_k$ ) et le nombre des modes locaux de couplage ( $N_\Gamma$ ), la méthode de synthèse modale consiste à déterminer une approximation des coefficients de décomposition permettant d'obtenir avec une bonne précision les éléments propres globaux.

## 2.2. Formulation de la méthode

La méthode de synthèse modale à mettre en oeuvre doit permettre le calcul des éléments propres globaux en tenant compte au mieux des conditions physiques de raccordement, et du problème aux valeurs propres global décrit par les relations (1) et (2).

Elle consiste à rechercher les fonctions propres globales sous la forme d'une double décomposition sur les bases de transfert et de couplage locales. Soit :

$$\begin{aligned} \forall M \in \Omega_k \quad \mathcal{V}_{ki}^N(M) &= \sum_{l=1}^{N_k} p_{kli} V_{kl}(M) \\ &+ \sum_{q=1}^{N_\Gamma} \alpha_{qi} \tilde{S}_{kq}(M), \end{aligned} \quad (11)$$

où  $V_{kl}$  et  $\tilde{S}_{kq}$  représentent, respectivement, la  $l$  ième fonction propre locale de transfert et la  $q$  ième fonction propre locale de couplage telles que

$$\forall M \in \Gamma \quad V_{kl}|_\Gamma(M) = 0,$$

$$\forall M \in \Gamma \quad \tilde{S}_{1q}|_\Gamma(M) = \tilde{S}_{2q}|_\Gamma(M) = S_q(M).$$

On indice par  $N$  les fonctions propres approchées de  $\mathcal{L}$ ,  $N$  représentant la dimension de l'espace engendré par ces fonctions ( $N = N_1 + N_2 + N_\Gamma$ ).

On peut montrer que la relation (11) permettrait d'obtenir rigoureusement les fonctions propres globales si les bases locales étaient infinies.

Ainsi, rechercher une approximation des  $\mathcal{V}_{ki}$  se réduit à calculer une approximation des coefficients de décomposition sur les bases locales. Leur calcul doit tenir compte à la fois du problème aux valeurs propres, et de la condition de continuité du flux sur  $\Gamma$ , vérifiés par les fonctions globales.

Pour satisfaire ces conditions, la nouvelle méthode de synthèse modale proposée dans cet article introduit

une fonctionnelle de flux qui pénalise le saut de flux des  $\mathcal{Y}_{ki}^N$  sur  $\Gamma$ . Elle s'apparente alors à une méthode de Galerkin moindres carrés. Cette approche permet de calculer une approximation des fonctions propres globales, en répartissant le résidu à la fois à l'intérieur du système et au niveau de la frontière de raccordement.

Une autre approche consiste à ne pas pénaliser la discontinuité en flux sur la frontière de raccordement. Dans ce cas, seul le problème aux valeurs propres est pris en compte. Les coefficients de décomposition sur les bases locales sont calculés par une méthode de Galerkin classique. Cette méthode donne de bons résultats. On constate néanmoins un saut de flux non nul au niveau de  $\Gamma$ , ce qui n'est pas surprenant puisqu'aucun contrôle du flux n'est effectué.

Pour déterminer les coefficients de décomposition, nous disposons des relations données par le problème aux valeurs propres global défini par les équations (1)–(4). Ces dernières sont difficilement exploitables directement car ponctuelles. Nous allons travailler à partir de leur formulation faible (variationnelle) de façon à éliminer la variable d'espace.

Ainsi les relations (1) et (2) du problème aux valeurs propres global, valables pour tout point interne de chaque sous-domaine de  $\Omega$  sont équivalentes à :

$$\sum_{k=1}^2 \left[ -K_k \int_{\Omega_k} \nabla \mathcal{Y}_{ki}^N \cdot \nabla \psi \, dM - h \cdot \int_{\partial\Omega_k \cap \partial\Omega} \mathcal{Y}_{ki}^N \psi \, dM \right] = z_i \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_k} \mathcal{Y}_{ki}^N C_k \psi \, dM, \quad (12)$$

pour toute fonction arbitraire  $\psi$  de l'espace  $H^1(\Omega)$  vérifiant sur  $\partial\Omega$  les conditions aux limites homogènes de première espèce du problème, s'il y en a.

Pour tenir compte de la condition de continuité en flux, nous introduisons dans la forme variationnelle du problème aux valeurs propres global une fonctionnelle de flux afin d'obtenir un nouveau problème aux valeurs propres à partir duquel nous allons rechercher une approximation des fonctions globales.

Cette fonctionnelle de flux doit d'une part s'exprimer à partir du saut de flux sur  $\Gamma$  des fonctions globales et d'autre part respecter les propriétés de symétrie de la forme bilinéaire associée à la forme variationnelle du problème aux valeurs propres initial.

Ainsi, on définit une fonctionnelle de flux de la forme :

$$f^N(\mathcal{Y}_i^N, \psi) = \sum_{p=1}^{N_i} -|\lambda_{\Gamma p}^1 + \lambda_{\Gamma p}^2|^\beta \phi(\mathcal{Y}_i^N, \tilde{\mathcal{S}}_p) \cdot \phi(\psi, \tilde{\mathcal{S}}_p), \quad (13)$$

dans laquelle :

- $\phi(u, \tilde{\mathcal{S}}_p)$  représente une forme intégrale correspondant à la projection orthogonale du saut de flux

au niveau de  $\Gamma$  de la fonction  $u$  sur la base des fonctions propres de l'opérateur  $\mathcal{F}_k$  :

$$\phi(u, \tilde{\mathcal{S}}_p) = \int_{\Gamma} \left[ \sum_{k=1}^2 K_k \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_k} \cdot \mathcal{S}_p \, dM \right].$$

- Le terme  $|\lambda_{\Gamma p}^1 + \lambda_{\Gamma p}^2|^\beta$  est un artifice numérique qui permet de préciser en quel sens le saut de flux des fonctions calculées est petit. Le domaine de variation de l'exposant  $\beta$  est fixé par l'analyse de convergence.

Minimiser la fonctionnelle  $f^N(\mathcal{Y}_i^N, \psi)$  revient donc à contrôler la continuité du flux sur la frontière de raccordement. On admet donc la possibilité d'avoir un terme de source ou de puits au niveau de la frontière  $\Gamma$ .

Le calcul des éléments propres approchés s'effectue en prenant pour fonctions de pondération les  $N_1 + N_2$  fonctions propres locales de transfert et les  $N_\Gamma$  fonctions propres locales de couplage. Le choix de ces fonctions locales comme fonctions de pondération est lié à leur propriété d'orthogonalité.

Ainsi, la méthode de synthèse modale proposée consiste à résoudre le problème aux valeurs propres mis sous la forme variationnelle suivante : on cherche  $\mathcal{Y}_{ki}^N, z_i^N$  tels que pour toute fonction  $\psi$  de l'espace engendré par les fonctions locales de couplage et de transfert intervenant dans la formule (11), on a

$$\sum_{k=1}^2 \left[ -K_k \int_{\Omega_k} \nabla \mathcal{Y}_{ki}^N \cdot \nabla \psi \, dM - h \cdot \int_{\partial\Omega_k \cap \partial\Omega} \mathcal{Y}_{ki}^N \cdot \psi \, dM \right] - A^N f^N(\mathcal{Y}_{ki}^N, \psi) = z_i^N \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_k} \mathcal{Y}_{ki}^N C_k \psi \, dM, \quad (14)$$

où  $A^N$  est un coefficient de pondération de la fonctionnelle de flux qui peut dépendre de  $N$ . Ses valeurs (ou ordres de grandeur) sont fixées par l'analyse de convergence. Un choix convenable des coefficients  $\beta$  et  $A^N$  permet de rendre la discontinuité du flux suffisamment petite pour que son influence au niveau de la reconstitution des fonctions globales, et donc de la réponse dynamique du système, soit négligeable.

La résolution consiste en pratique, après avoir remplacé les fonctions propres globales par leur expression dépendant des fonctions propres locales, à calculer les coefficients de décomposition sur les bases locales.

On obtient alors un problème aux valeurs propres sous la forme matricielle suivante :

$$[\mathbf{K}_f^N](\mathbf{p}) = z_i^N [\mathbf{M}^N](\mathbf{p}), \quad (15)$$

avec :

- $[\mathbf{K}_f^N]$  : matrice de conductivité symétrique dont les coefficients sont des formes intégrales dépendant des fonctions locales de transfert  $V_{ki}$  et de couplage  $\tilde{\mathcal{S}}_{kq}$ . Elle est de dimension  $(N \times N)$  et définie par :

$$[\mathbf{K}_f^N] = \begin{bmatrix} K_{f11} & K_{f12} & K_{f1\Gamma} \\ K_{f12} & K_{f22} & K_{f2\Gamma} \\ K_{f1\Gamma} & K_{f2\Gamma} & K_{\Gamma\Gamma} \end{bmatrix},$$

les termes  $K_{fij}$  étant des sous-matrices dont les coefficients ont pour expression :

$$K_{f11}(m, l) = \lambda_{1l} \cdot \delta_{lm} - A^N \sum_{p=1}^{N_l} |\lambda_{1p}^1 + \lambda_{1p}^2|^\beta \\ \times \left( \int_{\Gamma} S_p \cdot K_1 \frac{\partial V_{1l}}{\partial \mathbf{n}_1} \Big|_{\Gamma} \cdot dM \right) \cdot \left( \int_{\Gamma} S_p \cdot K_1 \frac{\partial V_{1m}}{\partial \mathbf{n}_1} \Big|_{\Gamma} \cdot dM \right) \quad (16)$$

$$K_{f12}(m, l) = -A^N \sum_{p=1}^{N_l} |\lambda_{1p}^1 + \lambda_{1p}^2|^\beta \\ \times \left( \int_{\Gamma} S_p \cdot K_2 \frac{\partial V_{2l}}{\partial \mathbf{n}_2} \Big|_{\Gamma} \cdot dM \right) \cdot \left( \int_{\Gamma} S_p \cdot K_1 \frac{\partial V_{1m}}{\partial \mathbf{n}_1} \Big|_{\Gamma} \cdot dM \right) \quad (17)$$

$$K_{f1\Gamma}(m, p) = -A^N |\lambda_{1p}^1 + \lambda_{1p}^2|^{\beta+1} \\ \times \left( \int_{\Gamma} S_p \cdot K_1 \frac{\partial V_{1m}}{\partial \mathbf{n}_1} \Big|_{\Gamma} \cdot dM \right) \quad (18)$$

$$K_{f22}(m, l) = \lambda_{2l} \cdot \delta_{lm} - A^N \sum_{p=1}^{N_l} |\lambda_{1p}^1 + \lambda_{1p}^2|^\beta \\ \times \left( \int_{\Gamma} S_p \cdot K_2 \frac{\partial V_{2l}}{\partial \mathbf{n}_2} \Big|_{\Gamma} \cdot dM \right) \cdot \left( \int_{\Gamma} S_p \cdot K_2 \frac{\partial V_{2m}}{\partial \mathbf{n}_2} \Big|_{\Gamma} \cdot dM \right) \quad (19)$$

$$K_{f2\Gamma}(m, p) = -A^N |\lambda_{1p}^1 + \lambda_{1p}^2|^{\beta+1} \\ \times \left( \int_{\Gamma} S_p \cdot K_1 \frac{\partial V_{2m}}{\partial \mathbf{n}_2} \Big|_{\Gamma} \cdot dM \right) \quad (20)$$

$$K_{\Gamma\Gamma}(p, p) = (\lambda_{1p}^1 + \lambda_{1p}^2) - A^N |\lambda_{1p}^1 + \lambda_{1p}^2|^{\beta+2}. \quad (21)$$

•  $[\mathbf{M}^N]$  : matrice de capacité symétrique définie par :

$$[\mathbf{M}^N] = \begin{bmatrix} [I] & \left[ \int_{\Omega} \nu C \tilde{S} dM \right] \\ \left[ \int_{\Omega} \tilde{S} C \nu dM \right] & \left[ \int_{\Omega} \tilde{S} C \tilde{S} dM \right] \end{bmatrix},$$

$[I]$  représentant la matrice identité.

La diagonalisation du couple matriciel ( $[\mathbf{M}^N]$ ,  $[\mathbf{K}_f^N]$ ) permet d'obtenir une approximation des valeurs propres globales de l'opérateur de la chaleur. Les coefficients de décomposition sur les bases locales livrent les fonctions propres globales approchées de  $\mathcal{L}$ . Comme les fonctions propres de transfert locales, les fonctions globales vérifient certaines propriétés d'orthogonalité. Celles-ci sont issues des relations d'orthogonalité vérifiées par les vecteurs propres  $\mathbf{p}_i$  du couple matriciel ( $[\mathbf{M}^N]$ ,  $[\mathbf{K}_f^N]$ ) (relation (15)).

### 2.3. Convergence

Une analyse de convergence de la méthode a été développé dans [28]. On montre notamment que :

$$f^N(\mathcal{V}_i^N, \mathcal{V}_i) + |z_i^N - z_i| + \|\mathcal{V}_i^N - \mathcal{V}_i\|^2 \\ = \mathcal{O} \left| \frac{1}{N_1^\alpha} + \frac{1}{N_2^\alpha} + \frac{1}{N_\Gamma^\delta} \right|, \quad (22)$$

où  $\alpha$  et  $\delta$  dépendent de la dimension de l'espace et du comportement asymptotique de  $A^N$ . La norme  $\| \cdot \|$  correspond à la norme liée à l'énergie (norme de  $H^1(\Omega)$ ). On a donc convergence des valeurs propres et des modes de transfert globaux ; de plus le saut de flux tend vers 0.

La technique de synthèse modale présentée ici montre clairement comment toute méthode de synthèse modale transforme un problème initial continu en un autre discret. La discrétisation est liée à la décomposition des modes globaux sur les bases propres locales.

La base propre définie par les modes globaux approchés peut être réduite à son tour afin d'être utilisée soit comme base locale pour une nouvelle étape de synthèse, soit pour construire un modèle d'évolution modal.

## 3. DETERMINATION DES CHAMPS STATIQUES GLOBAUX

Si la connaissance des éléments propres de l'opérateur qui caractérise le comportement dynamique d'un système permet d'en faire une première analyse, elle est insuffisante pour connaître l'évolution temporelle du champ des températures, ou des flux, en fonction des sollicitations imposées au système. Pour cela il est nécessaire de construire un modèle d'évolution dans lequel le champ de température s'exprime en fonction des modes propres (modèle d'évolution modal).

La séparation glissant dynamique évoquée au paragraphe (1) autorise d'exprimer le champ de température sous la forme :

$$T(M, t) = T^d(M, t) + T^g(M, t). \quad (23)$$

Lorsque les éléments propres sont calculés par une méthode de synthèse modale (cas qui nous intéresse exclusivement ici), le champ dynamique ( $T^d(M, t)$ ) s'exprime à partir de caractéristiques locales de chaque composant (fonctions propres de transfert et de couplage) au travers des fonctions propres globales. Aussi, il serait souhaitable que le champ glissant du système global ( $T^g(M, t)$ ) puisse également s'exprimer à partir des mêmes fonctions locales de chaque composant (fonctions de transfert, de couplage, statiques).

Pour simplifier le formalisme présenté ici, on suppose que chaque composant  $k$  n'est soumis qu'à une seule sollicitation  $U_k$ .

On définit les champs glissants locaux  $t_k^g$  à partir des relations suivantes :

$$\begin{cases} \forall M \in \Omega_k & \mathcal{L}_k(t_k^q(M, t)) = 0, \\ \forall M \in (\partial\Omega_k - \Gamma) & t_k^q(M, t) = U_k(M, t), \\ \forall M \in \Gamma & t_k^q(M, t) = 0. \end{cases} \quad (24)$$

Pour assurer la compatibilité des conditions aux limites portant sur les champs glissants locaux, on suppose que les sollicitations sont nulles en tout point d'un voisinage de  $\partial\Omega \cap \Gamma$ . Des travaux seront développés pour lever cette restriction.

Les champs glissants locaux  $t_1^q$  et  $t_2^q$  sont prolongés par 0 dans  $\Omega_2$  et  $\Omega_1$ , respectivement. Ils seront notés dans la suite  $t_{kj}$  avec  $j$  indice de la sollicitation ( $j = k$  pour la sollicitation appliquée sur  $\partial\Omega_k$ ,  $t_{kj} = 0$  si  $j \neq k$ ).

Chaque sollicitation locale (appliquée au niveau de chaque composant considéré isolé), doit être prise en compte au niveau de la structure globale  $\Omega$ . Aussi, le problème consiste en la détermination du champ statique *global* relatif à chaque sollicitation locale appliquée sur  $\partial\Omega_k$ ,  $k = 1, 2$ .

Pour cela nous disposons des équations vérifiées par chaque champ glissant global  $T_{kj}^q$  relatif à une sollicitation  $j$  donnée. Soit, par exemple pour la sollicitation appliquée sur  $\partial\Omega_1$  :

$$\begin{aligned} \forall M \in \Omega_k, k = 1, 2 & \quad \mathcal{L}[T_{k1}^q(M, t)] = 0, \\ \forall M \in (\partial\Omega_1 - \Gamma) & \quad \mathcal{B}[T_{11}^q(M, t)] = U_1(M, t), \\ \forall M \in (\partial\Omega_2 - \Gamma) & \quad \mathcal{B}[T_{21}^q(M, t)] = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Pour être entièrement définis, les champs glissants globaux doivent vérifier des conditions de transmission traduisant la continuité des  $T_{kj}^q$  et du flux sur la frontière de raccordement, soit :

$$\forall M \in \Gamma \quad T_{11}^q(M) = T_{21}^q(M), \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \forall M \in \Gamma & \quad -K_1 \nabla(T_{11}^q(M)) \cdot \mathbf{n}_1 \\ & \quad - K_2 \nabla(T_{21}^q(M)) \cdot \mathbf{n}_2 = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

La différence entre le champ glissant global relatif à une sollicitation  $j$  et le champ glissant local relatif à cette même sollicitation permet d'obtenir un champ vérifiant des conditions aux limites homogènes sur  $\partial\Omega$ . Il est donc décomposable sur les bases locales de transfert et de couplage. Comme ce champ différence est  $\mathcal{L}$ -harmonique sur chaque sous-domaine, on peut montrer facilement que ses coefficients de décomposition sur les bases locales de transfert sont tous nuls.

Si bien que l'on peut rechercher une approximation des champs glissants globaux sous la forme :

$$T_{kj}^{qN}(M, t) = \sum_{q=1}^{N_f} \gamma_{qj} \tilde{S}_{1q}(M) + t_{kj}^q(M, t). \quad (28)$$

Il reste alors à déterminer les  $\gamma_{qj}$ .

Or, de la même façon que pour les fonctions propres globales, la trace sur  $\Gamma$  des champs glissants globaux est reconstituée de fait par les modes de couplage. Aussi, les coefficients  $\gamma_{qj}$  sont calculés uniquement à partir de la relation traduisant la continuité de flux.

On détermine donc les coefficients inconnus à partir

de la formulation variationnelle suivante :

$$\int_{\Gamma} (-K_1 \nabla(T_{1j}^{qN}(M)) \cdot \mathbf{n}_1 - K_2 \nabla(T_{2j}^{qN}(M)) \cdot \mathbf{n}_2) \cdot \psi \, dM = 0, \quad (29)$$

pour toute fonction  $\psi$  de l'espace engendré par les fonctions de couplage  $S_q$ , ( $1 \leq q \leq N_f$ ).

En remplaçant les champs glissants globaux par leur expression (28) dans la relation ci-dessus, on aboutit à une formulation matricielle de la forme :

$$[\mathbf{F}_{\Gamma}](\gamma_j) = (\mathcal{Q}_j). \quad (30)$$

On obtient ainsi une relation entre les coefficients  $\gamma_j$  et la sollicitation  $U_j$ , ce qui permet de calculer le champ statique global relatif à cette sollicitation.

Ainsi mise en oeuvre, la méthode proposée ici respecte les propriétés de modularité (les champs statiques globaux peuvent être calculés uniquement à partir de fonctions locales), ainsi que la continuité des champs statiques et au moins approximativement de leur flux sur la frontière de raccordement. Le raccordement des champs locaux se fait de façon intrinsèque (indépendance *vis-à-vis* du maillage...) grâce à l'utilisation des modes de couplage. La méthode proposée ici est donc tout à fait cohérente avec la démarche présentée précédemment pour la construction des modes propres globaux.

Ainsi, après avoir calculé les champs statiques globaux correspondant à chaque sollicitation locale, le modèle d'évolution modal peut être construit.

#### 4. MODELE D'EVOLUTION MODAL

Tout problème d'évolution thermique est décrit par un système différentiel où on retrouve l'équation de diffusion, la condition aux limites, et la condition initiale

$$\begin{aligned} \forall M \in \Omega, t \geq t_0 & \quad \mathcal{L}(T(M, t)) = C \frac{\partial T}{\partial t}(M, t), \\ \forall M \in \partial\Omega & \quad \mathcal{B}(T(M, t)) = U(M, t), \\ \forall M \in \Omega, t = t_0 & \quad T(M, t_0) = T_0(M). \end{aligned} \quad (31)$$

Le problème d'évolution modal se déduit du système précédent en remplaçant la fonction  $T(M, t)$  par une expression dépendant des fonctions propres de  $\mathcal{L}$  et des champs glissants.

Pour déterminer l'équation modale, nous allons utiliser :

- les relations vérifiées par le champ dynamique global :

$$\begin{aligned} \forall M \in \Omega, t \geq t_0 \\ \mathcal{L}(T^d(M, t)) = C \frac{\partial T^d}{\partial t}(M, t) \\ + C \frac{\partial T^g}{\partial t}(M, t), \\ \forall M \in \partial\Omega \quad \mathcal{B}(T^d(M, t)) = 0, \end{aligned} \quad (32)$$



- l'expression du champ dynamique en fonction des modes propres globaux calculés par la nouvelle technique de synthèse modale présentée précédemment (méthode de Galerkin moindres carrés) soit :

$$\forall M \in \Omega \quad T_k^{d^{nm}}(M, t) = \sum_{i=1}^m \gamma_{ki}^{-N}(M) \cdot \mathcal{X}_i(t),$$

- la continuité du champ dynamique global au niveau de  $\Gamma$  est assurée de fait grâce à la méthode conforme mise en oeuvre pour le calcul des modes globaux. Par contre, nous avons vu que la prise en compte de la continuité du flux pour le calcul de ces derniers est plus délicate et fait intervenir une fonctionnelle de flux. Aussi, l'écriture de l'équation d'évolution va nécessiter, de même, la prise en compte d'une fonctionnelle de flux équivalente à celle définie par la relation (13) dans la formulation variationnelle du système différentiel (32).

L'équation d'évolution modale est déterminée à partir de la relation suivante :

$$\sum_{k=1}^2 \left[ -K_k \int_{\Omega_k} \nabla T_k^{d^{nm}} \cdot \nabla \psi \, dM - h \cdot \int_{\varepsilon\Omega_k \cap \partial\Omega} T_k^{d^{nm}} \cdot \psi \, dM \right] - f^N(T_k^{d^{nm}}, \psi) = \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_k} C_k \left[ \frac{\partial T_k^{d^{nm}}}{\partial t} + \frac{\partial T_k^{q^N}}{\partial t} \right] \psi \, dM, \quad (33)$$

pour toute fonction  $\psi$  de l'espace engendré par les fonctions locales de transfert et de couplage qui interviennent dans la relation (11).

En remplaçant le champ dynamique par son expression en fonction des modes propres globaux, sachant que ces derniers se décomposent sur les bases locales, on peut montrer qu'en prenant comme fonction de pondération ces mêmes fonctions propres locales de transfert et de couplage, on aboutit à une formulation matricielle du type :

$$\dot{\mathcal{X}} = [\mathcal{F}]\mathcal{X} + [\mathbf{B}]\dot{U}. \quad (34)$$

L'équation différentielle vérifiée par les états d'excitation est très simple. De plus, la matrice  $[\mathcal{F}]$  étant diagonale, les équations d'état sont découplées.

La technique modale permet donc de passer d'un problème continu, différentiel en espace et en temps, à une simple équation matricielle différentielle en temps.

L'intégration de cette équation d'état permet alors de calculer à tout instant l'évolution temporelle du champ de température du système global, à l'aide de relations du type :

$$T = [\mathcal{P}]\mathcal{X} + [\mathbf{S}_p]U.$$

## 5. APPLICATION : ETUDE D'UN ARBRE DE BOITE DE VITESSE

### 5.1. Recherche des éléments propres

Pour montrer la faisabilité de la technique de synthèse modale présentée ici, nous proposons de l'appliquer à la recherche de la solution dynamique d'un problème de refroidissement d'une pièce mécanique. La pièce mécanique est un arbre de boîte de vitesse en acier. Elle est représentée schématiquement sur la Fig. 2 en géométrie axisymétrique.

La première étape de la méthode consiste à découper le système global en composants. Le découpage est *a priori* arbitraire, il est néanmoins souhaitable que celui-ci s'effectue dans une zone de couplage faible (surface de raccordement réduite). Pour traiter le problème posé nous proposons un découpage en deux composants comme indiqué par la Fig. 2.

Après avoir isolé chaque demi-arbre, nous avons calculé les matrices de conductivité et de capacité par une méthode d'éléments finis, en imposant une condition aux limites de type Dirichlet sur le contour  $\partial\Omega$  de chacun d'eux. La discrétisation spatiale que nous avons adoptée comporte 346 éléments (393 noeuds) pour le demi-arbre droit et 314 éléments (365 noeuds), pour le demi-arbre gauche.

Les éléments propres locaux de transfert et de couplage sont déterminés à partir des matrices éléments finis obtenues.

5.1.1. *Modes de transfert locaux.* La diagonalisation du couple matriciel issu de l'approximation par éléments finis a été faite par une méthode d'itération par sous-espace. Nous avons ainsi calculé les cent premiers éléments propres de chaque demi-arbre.

L'intérêt des méthodes modales est de pouvoir réduire le nombre de modes sans trop altérer la précision. Les bases modales locales ont été réduites par une technique simple de troncature. Nous avons retenu ici les 25 premiers modes de chaque demi arbre, ce qui donne un rapport entre la dernière constante de temps et la première de l'ordre de 1/10.

L'allure du mode 6 du demi-arbre gauche est donnée Fig. 3.

5.1.2. *Modes de couplage locaux.* La discrétisation de la relation (10) aboutit à un système matriciel dont la dimension dépend du nombre de noeuds sur la frontière de raccordement. Dans l'exemple présenté ici, la frontière de raccordement de chaque demi-arbre est discrétisée en 10 éléments. La diagonalisation du couple de matrices obtenu permet le calcul des éléments propres de couplage  $\lambda_{r,q}$  et  $S_q$ . Le relèvement harmonique des  $S_q$  se fait alors à partir de la relation (9) discrétisée. Les fonctions de couplage correspondent ici à des fonctions de Bessel.

De la même façon que les modes locaux de transfert, la base des modes de couplage peut être réduite. La dominance des modes est liée à leur ordre. Pour avoir une bonne reconstitution des premiers modes globaux, on constate que seuls les premiers modes de couplage sont à prendre en compte. La réduction des

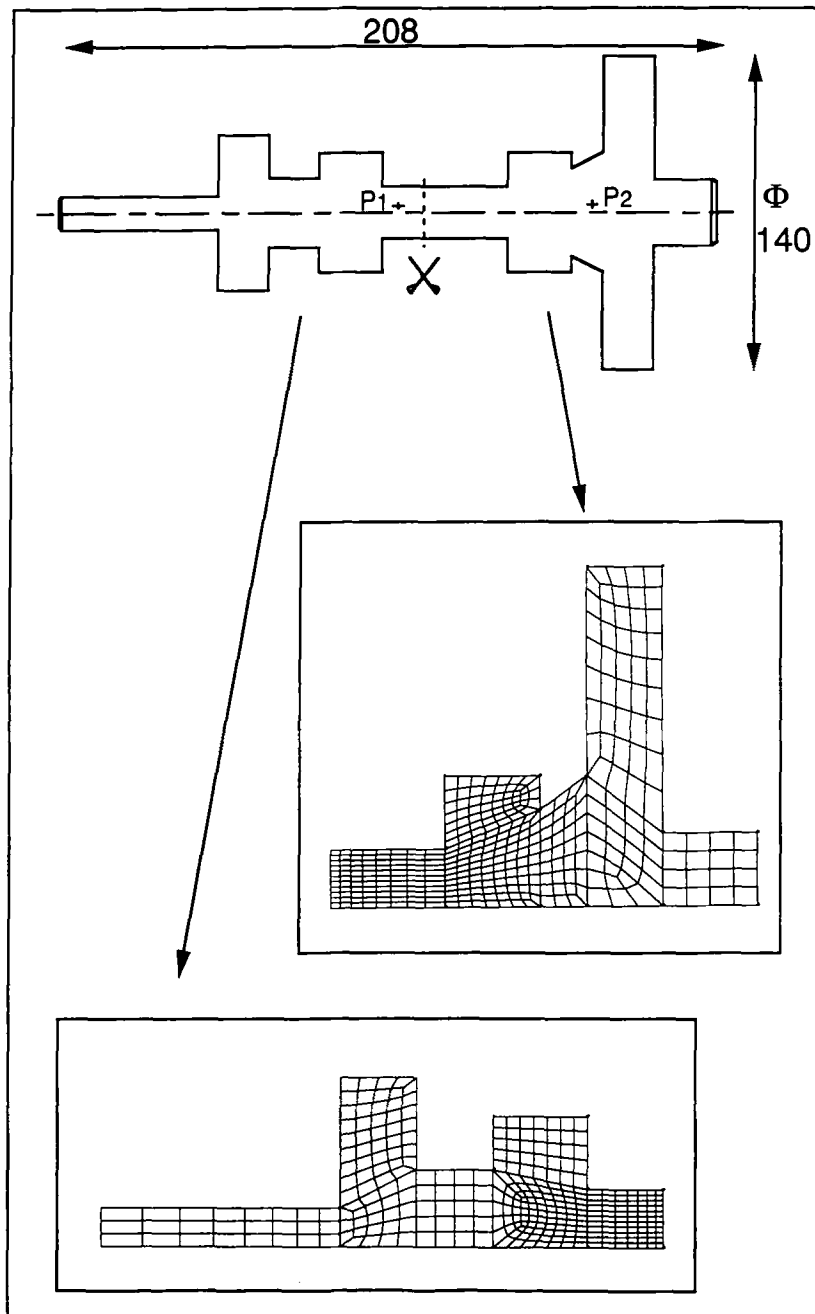


FIG. 2. Arbre de boîte de vitesse.

bases locales de couplage peut alors se faire par une méthode de troncature de type Marschall.

Pour chaque demi-arbre, nous avons retenu les cinq premiers modes de couplage.

Le mode de couplage 1 du demi-arbre gauche est représenté Fig. 4.

On constate que ce mode est très localisé au niveau de la frontière de raccordement. Ceci est en pratique vérifié pour tous les modes de couplage, ce qui laisse conjecturer que leur définition dépend peu de la géométrie exacte des sous-domaines.

Après avoir calculé et réduit les bases locales, on peut calculer les éléments propres de l'opérateur de la chaleur relatif à l'arbre complet.

5.1.3. *Eléments propres globaux.* Leur calcul se fait à partir des matrices de conductivité et de capacité du problème aux valeurs propres défini par la relation (15).

La dimension de ces matrices correspond à la somme des dimensions des bases locales réduites (de transfert et de couplage). Soit  $25 + 25 + 5 = 55$ .

Ce nombre peut être comparé à la dimension des

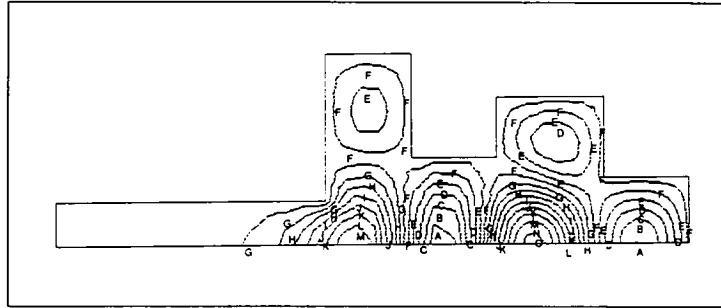


FIG. 3. Demi-arbre gauche/allure du mode de transfert  $n^{\circ} 6$ .

matrices du problème aux valeurs propres relatif à l'arbre complet, obtenues directement à partir de l'approximation éléments finis : 758.

La comparaison de ces deux nombres montre dès à présent l'intérêt des méthodes de sous-structuration.

La méthode de Galerkin moindres carrés mise en oeuvre ici nécessite de se fixer deux paramètres ( $A^N$  et  $\beta$ ) permettant de minimiser au mieux la fonctionnelle de flux tout en assurant une bonne reconstitution des éléments propres globaux.

Nous avons choisi après plusieurs essais numériques  $A^N = 10$  et  $\beta = 0$ .

Dans ces conditions nous avons obtenu les résultats présentés ci-dessous.

Pour montrer la validité des résultats, nous les avons comparés à une référence, correspondant à un calcul direct des éléments propres à partir des matrices éléments finis obtenues après la discrétisation de l'ensemble de l'arbre.

*Valeurs propres.* Les 21 premières constantes de temps (inverse des valeurs propres) sont données en secondes dans le Tableau (1).

On constate un écart très faible (inférieur à 1%) entre les constantes de temps obtenues par synthèse modale et la référence. Cet écart est même quasiment nul pour les quatre premières valeurs. En fait les quatre premiers modes globaux sont localisés uniquement dans le demi-arbre droit ou le demi-arbre gauche. Les modes de couplage interviennent peu dans

leur reconstitution. Si bien que les valeurs propres correspondantes sont très proches des valeurs propres locales de transfert.

*Fonctions propres.* Nous comparons ici l'allure d'un mode global de transfert approché par synthèse modale avec celle du même mode issu d'une méthode directe. Sa représentation correspond à un thermogramme élémentaire. Nous avons choisi un mode qui est localisé à la fois dans chaque demi-arbre et dans la zone de couplage. Soit par exemple le mode 8.

L'allure du mode 8 obtenu par une méthode directe, représentée à partir de lignes isovaleurs est donnée Fig. 5. De même, l'allure du mode 8 obtenu par synthèse modale est donnée Fig. 6.

On constate un léger biais au niveau de la zone de couplage. L'accord général entre les deux approches est néanmoins satisfaisant.

## 5.2. Résultats de simulation

On s'intéresse ici à l'étude du refroidissement de l'arbre de boîte de vitesse. On suppose une sollicitation échelon dont la valeur vaut  $600^{\circ}\text{C}$  à l'instant initial et  $0^{\circ}\text{C}$  aux instants suivants. On s'intéresse à l'évolution temporelle de la température en deux points de l'arbre. Le premier point est situé dans la zone de couplage (noté  $P1$  sur la Fig. 2). Le second point est situé au centre de la partie droite de l'arbre, (noté  $P2$  sur la Fig. 2).

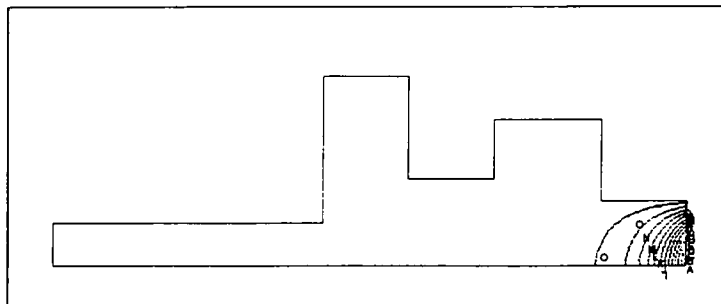
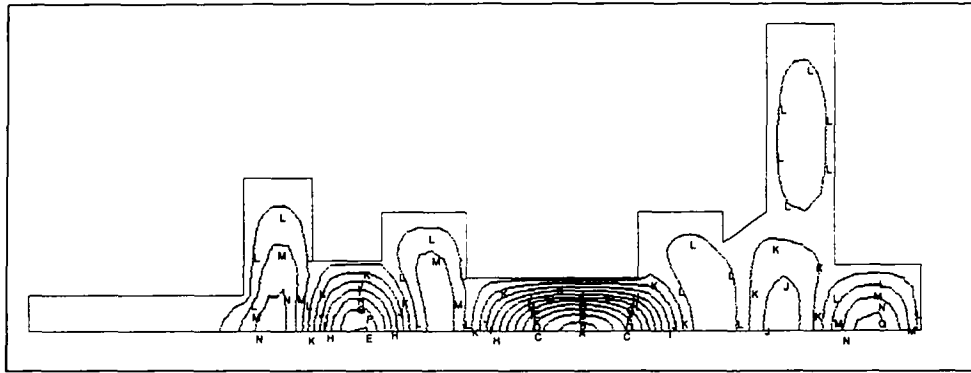


FIG. 4. Demi-arbre gauche/allure du 1er mode de couplage.

Tableau 1. Constantes de temps en seconde de l'arbre complet

|                 | Mode 01 | Mode 02 | Mode 03 | Mode 04 | Mode 05 | Mode 06 | Mode 07 |
|-----------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Synthèse modale | 11,238  | 7,528   | 6,824   | 5,662   | 4,334   | 3,818   | 3,733   |
| Référence       | 11,238  | 7,528   | 6,824   | 5,662   | 4,335   | 3,826   | 3,747   |
|                 | Mode 08 | Mode 09 | Mode 10 | Mode 11 | Mode 12 | Mode 13 | Mode 14 |
| Synthèse modale | 3,505   | 3,309   | 3,07    | 2,87    | 2,734   | 2,667   | 2,523   |
| Référence       | 3,531   | 3,329   | 3,08    | 2,869   | 2,738   | 2,675   | 2,53    |
|                 | Mode 15 | Mode 16 | Mode 17 | Mode 18 | Mode 19 | Mode 20 | Mode 21 |
| Synthèse modale | 2,396   | 2,274   | 2,09    | 1,95    | 1,839   | 1,694   | 1,664   |
| Référence       | 2,407   | 2,287   | 2,112   | 1,95    | 1,85    | 1,701   | 1,674   |

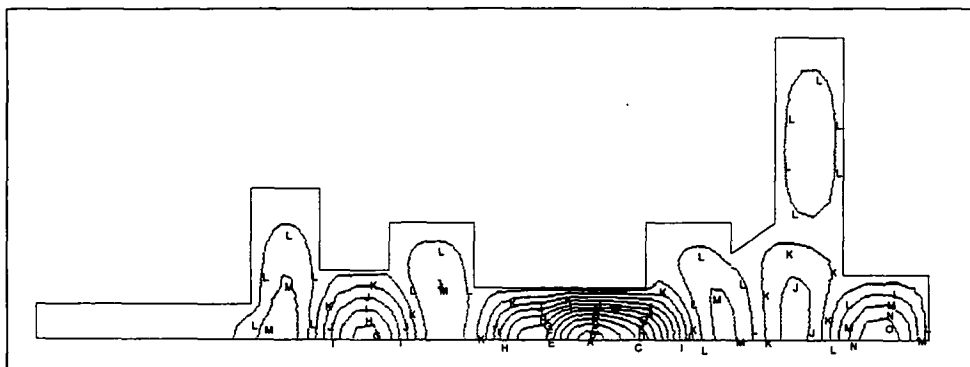
FIG. 5. Référence. Mode global 8. Isovaleur maximale  $A = 1$ , écart entre deux isovaleurs = 0.09.

Le modèle d'évolution obtenu par sous-structuration correspond à celui calculé dans le paragraphe 5.1. (modèle réduit d'ordre 55).

Tout d'abord nous considérons comme référence un modèle d'évolution dont l'ordre est supérieur à celui obtenu par sous-structuration : soit un modèle d'ordre 100 calculé par une méthode directe.

Sur la courbe Fig. 7 sont représentées d'une part l'évolution de la température en  $P1$  et  $P2$ , simulée par sous-structuration, d'autre part l'erreur de cette évolution par rapport à la référence d'ordre 100.

On constate une erreur importante (6%) dans les premiers instants de la simulation, et un biais plus grand pour le point situé dans la zone de couplage. Les causes de ces écarts peuvent être liées à la réduction du modèle obtenu par sous-structuration (55 modes), ou à l'approximation des modes globaux calculés par synthèse modale. Pour expliciter ces causes nous proposons de réduire le modèle de référence précédent à ses 55 premiers modes. Ainsi, dans ce cas les modèles comparés sont du même ordre. Sur la Fig. 8 sont représentées d'une part l'évolution de la température

FIG. 6. Synthèse Modale. Mode global 8. Isovaleur maximale  $A = 1$ , écart entre deux isovaleurs = 0.09.

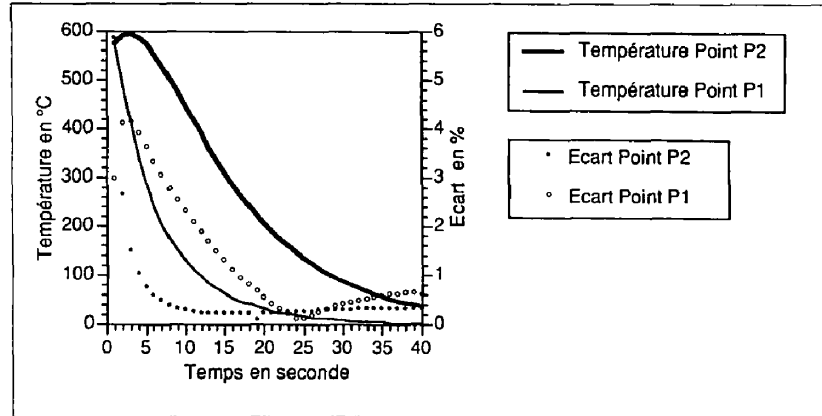


FIG. 7. Evolution de la température en deux points. Courbe erreur. Référence : 100 modes.

en  $P1$  et  $P2$ , simulée par sous-structuration, d'autre part l'erreur de cette évolution par rapport à la référence d'ordre 55.

Si on s'intéresse au point  $P2$ , on s'aperçoit Fig. 8 que l'écart obtenu dans les premiers instants de la simulation est bien moins important ( $\leq 1\%$ ) que celui constaté Fig. 7. Ainsi, en  $P2$  les résultats obtenus par sous-structuration sont équivalents à ceux obtenus par un modèle réduit du même ordre calculé par une méthode directe.

Par contre pour le point  $P1$  situé dans la zone de couplage, les écarts constatés avec une référence de 100 modes ou avec une référence de 55 modes sont quasiment du même ordre de grandeur (notamment pour  $t \leq 20$  s). Ces erreurs sont liées à une mauvaise approximation des modes propres dans la zone de couplage. On constate de plus que l'erreur maximale ne se produit pas à l'instant initial. Ceci peut s'expliquer par le fait qu'à un instant donné seule une partie des modes propres est excitée, aussi l'écart est maximal à l'instant où les modes excités sont les moins bien reconstitués. Ces résultats pourront être améliorés en prenant une technique de réduction des

bases de transfert locales mieux adaptée, autre que celle de Marschall retenue ici.

## 6. PERSPECTIVES

Nous avons montré dans cet article la faisabilité et l'intérêt des techniques de sous-structuration pour l'analyse et la simulation du comportement thermique de systèmes complexes. Les techniques de sous-structuration présentées ici seront généralisées pour traiter des couplages à plusieurs niveaux en considérant des contacts thermiques parfaits ou non. Les performances de la méthode peuvent être améliorées en sélectionnant les modes locaux différemment. Pour cela il faut utiliser des critères de dominance pertinents *vis-à-vis* de la synthèse modale.

Des développements sont en cours pour lever les limitations liées d'une part à la symétrie du découpage du système thermique en composants et d'autre part à la nature de la condition aux limites appliquée sur la frontière de raccordement (Dirichlet). Ils nécessitent la mise en oeuvre d'une méthode dite non-conforme permettant de minimiser à la fois le résidu en tout

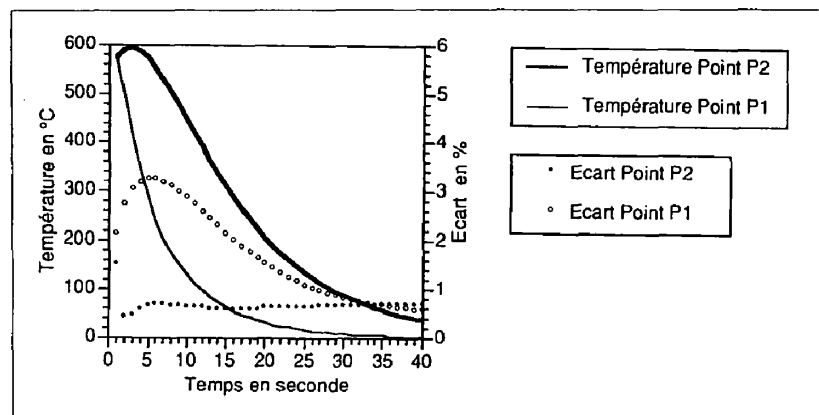


FIG. 8. Evolution de la température en deux points. Courbe erreur. Référence : 55 modes.

point interne du système, le saut de flux et le saut de température sur la frontière de raccordement.

### BIBLIOGRAPHIE

1. A. R. Mitchell and D. F. Griffiths, *The Finite Difference Method in Partial Differential Equations*. John Wiley, New York (1985).
2. G. Dhatt et G. Touzot, *Une présentation de la méthode des éléments finis*. Maloine Editions (1984).
3. R. Pasquetti, A. Caruso et C. A. Brebbia, Méthode des éléments de frontière. Résolution numérique des problèmes de diffusion thermique, *Revue Générale de Thermique* **328**, 228–234 (1989).
4. P. Bacot, A. Neveu et J. Sicard, Analyse modale des phénomènes thermiques en régime variable dans le bâtiment, *Revue Générale de Thermique* **267**, 189–201 (1984).
5. G. Lefebvre, A. Neveu, K. El Khoury and J. J. Salgon. Applying modal method to thermal modelling, *Proceedings of the 1990 International Heat Transfer Conference*, Jerusalem, Vol. 3, p. 157 (1990).
6. K. El Khoury et A. Neveu, Analyse modale des systèmes thermiques en présence de transferts non réciproques, *Int. J. Heat Mass Transfer* **32**, 213–226 (1989).
7. S. Setio, Comportement des structures mécaniques non linéaires soumis à des excitations stationnaires. Thèse de doctorat, Ecole Centrale Lyon (1991).
8. M. Marion and R. Temam. Nonlinear Galerkin method, *SIAM J. Numerical Anal.* (1988).
9. S. A. Marshall, An approximate method for reducing the order of a linear system, *Control* **AC13**, 642–643 (1966).
10. L. Litz, Order reduction of linear state models via optimal approximation of the non dominant modes, *North-Holland Publishing Company Large Scale System* **2**, 171–184 (1981).
11. G. P. Michailesco, Approximation des systèmes complexes par des modèles de dimension réduite, Thèse de Doctorat d'Etat, Univ. Paris Sud (1979).
12. D. Petit, Réduction de modèles de connaissance et identification de modèles d'ordre réduit : application aux processus de diffusion thermique, Thèse d'état, Univ. de Provence (1991).
13. C. Carter, Predicting passive solar performance using modal expansions, *Proceedings of 3rd US Nat. Passive Solar Conf., San Jose*, pp. 309–313 (1979).
14. G. Lefebvre, J. Bransier et A. Neveu, Simulation du comportement thermique d'un local par des modèles numériques d'ordre réduit, *Revue Générale de Thermique* **302**, 106–114 (1987).
15. A. Neveu et J. Sicard, Analyse de l'inertie thermique par la méthode modale, *Journée SFT*, Paris (1984).
16. J. J. Salgon and A. Neveu, Application of modal analysis to modelling of thermal bridges in building, *Energy and Buildings* **10**, 109–120 (1987).
17. P. Bacot, Identification de modèles de comportement des systèmes thermiques, *Revue Générale de Thermique* **277**, 25–31 (1985).
18. R. Pasquetti, D. Petit et T. B. Jaffar, Réduction et identification des processus de diffusion thermique par analyse modale, *Congrès SFT*, Marseille (1986).
19. Varga, *Matrix Iterative Analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1962).
20. F. Chatelin, *Valeurs propres de matrices*, Masson éditeur (1988).
21. R. R. Craig and M. C. C. Bampton, Coupling of substructures for dynamic analysis, *AIAA J.* **6**, 1313–1321 (1968).
22. R. Dautray et J. L. Lions, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, Masson (1985).
23. M. Chen, Nouvelle solution modale pour les parois de bâtiment, Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris (1989).
24. I. Blanc Sommereux, Etude du couplage dynamique de composants de bâtiment par synthèse modale, Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris (1991).
25. F. Bourquin, Analysis and comparison of several component mode synthesis methods on one dimensional domains, *Numerische Mathematik* **58**, 11–34 (1990).
26. F. Bourquin, Synthèse modale d'opérateurs elliptiques du second ordre, *C.R. Acad. Sci. Paris, t.309, Serie I*, pp. 919–922 (1989).
27. F. Bourquin, Synthèse modale et analyse numérique des multistruktures élastiques, Thèse de doctorat, Université Paris 6 (1991).
28. F. Bourquin, B. Flament and A. Neveu, A flux continuity preserving modal synthesis method, *A paraître*.

### MODAL SYNTHESIS: A SUBSTRUCTURING METHOD FOR LINEAR THERMAL SYSTEMS MODELLING

**Abstract**—This paper presents a new modal method for the modelling of complex thermal systems. This technique is based on the structural modularity of such systems. Thus, a substructuring approach is used to build a reduced modal model. First, we detail a dynamic substructuring method (also called modal synthesis). It aims to compute the eigenlements of the heat operator defined in the global system. In order to obtain these eigenlements we have developed a conforming least-square Galerkin method which controls the flux continuity on the interfaces between adjacent substructures. Then we present a static substructuring method to compute the pseudo-static term of the global solution. Finally, an example shows the relevance of the above approach. The methods described in this article assume a perfect thermal contact between components and a kind of symmetry in the complex thermal splitting. These restrictions of technical nature will be relaxed in a forthcoming paper.